

AXIOMA DE “P”: AS REGRAS DE INFERÊNCIA E TEOREMAS

1.1 Sintaxe e definição dos axiomas de P.

O que queremos fazer é distinguir uma classe de fórmulas de P da qual todas as tautologias de P (e sem outras fórmulas) que podem ser derivadas, por meio da aplicação de certas regras de inferência as quais nós subseqüentemente iremos especificar. Feito isto, teremos dois caminhos para demonstrar que a fórmula dada “A” é uma tautologia; por meio da tabela-verdade e por meio de se derivar “A” dos axiomas de P, ainda que o teste da tabela-verdade em princípios suficientes, porém, na prática isso se torna quase que impossível de realizar quando um grande número de letras sentenciais aparece em “A”; neste caso o melhor procedimento é derivar “A” de axiomas de P.

Este procedimento consiste em abaixar vários esquemas, com o entendimento que cada uma das infinitas fórmulas de P as quais são fórmulas de qualquer destes esquemas que serve para avaliar como um axioma de P é fácil de ver pela consulta das tabelas-verdade para “~” e “ \supset ”, que cada um destes axiomas é uma tautologia. O axioma, como segue, no qual A, B e C são fórmulas de P:

- a) $A \supset (B \supset C)$
- b) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- c) $(\sim B \supset \sim A) \supset ((\sim B \supset A) \supset B)$

Estes axiomas ocorrem, certamente, não em P em si mesmo, mas na meta-linguagem de P. De acordo com o primeiro destes esquemas, as seguintes fórmulas (em notação formal) são exemplos de axiomas de P:

- $p \supset (q \supset p)$
- $p \supset (p \supset p)$
- $(p \supset q) \supset (q \supset (p \supset q))$
- $\sim p \supset ((q \supset p) \supset \sim p)$

Conforme um exemplo de axioma fornecido pelo esquema (b) temos a fórmula:

$$(p \supset ((p \supset q) \supset r)) \supset ((p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset r))$$

E conforme um exemplo fornecido pelo axioma (c) temos a fórmula:

$$(\sim(\sim p \supset q) \supset \sim q) \supset ((\sim(\sim p \supset q) \supset q) \supset (\sim p \supset q))$$

Nota-se que apenas conectivos sentenciais os quais ocorrem dentro e além do axioma são conectivos para *negação* e para *condicional*. Assim para outros conectivos, devemos adicionar além do axioma no qual eles aparecem ou algum caminho que os

correlacionem com os conectivos para negação e o condicional. Aqui escolhemos estes últimos. Diremos que uma fórmula de “A” é, por definição, equivalente a outra fórmula “B” se e apenas se houver as fórmulas A_1 , B_1 , A_2 e B_2 , tal que “A” e “B” são similares, exceto que “A” contém uma ocorrência de “ A_1 ” em algum lugar onde “B” contém uma ocorrência de “ B_1 ”, e:

a) A_1 é $A_2 \vee B_2$ e B_1 é $\sim A_2 \supset B_2$, ou

b) A_1 é $A_2 \wedge B_2$ e B_1 é $\sim(A_2 \supset \sim B_2)$, ou

c) A_1 é $A_2 \equiv B_2$ e B_1 é $(A_2 \supset B_2) \wedge (B_2 \supset A_2)$.

Além disso, por exemplo, para (a) seguindo duas fórmulas de P são, por definição, *equivalentes*:

$p \vee q$

$\sim p \supset q$

As duas fórmulas são equivalentes:

$(p \equiv q) \wedge ((q \vee r) \vee p)$

$(p \equiv q) \wedge ((\sim q \supset r) \vee p)$.

No primeiro destes exemplos, A_1 é fórmula do tipo “ $P \vee Q$ ”, em si e B_1 é fórmula do tipo “ $\sim P \supset Q$ ”; no 2º exemplo A_1 é fórmula do tipo $(q \vee r)$ e B_1 é fórmula do tipo $(\sim q \supset r)$.

Note-se que a definição acima de “por definição equivalente”, procede em concordância com as interpretações dos conectivos sentenciais os quais fornecidos pelas tabelas-verdade para esses conectivos. Qualquer das duas fórmulas de P, as quais são, por definição, equivalentes, são comprovadas pelo teste da tabela-verdade: isto é, para cada designação de valores exatos as letras sentenciais estão dentro destas fórmulas, essas duas fórmulas tomam exatamente os mesmos valores.

Para derivarmos os teoremas de axiomas de P necessitamos de algumas *regras de inferência*, a qual nos permite inferir fórmulas de outras fórmulas. Para derivar tudo das tautologias de P e dos axiomas de P precisamos apenas de 2 regras de inferência. Primeiro, usaremos uma regra de *intercâmbio definicional*. Isto é, como segue:

a) Se “A” e “B” são, por definição, equivalentes, então de “A” podemos inferir “B” e vice-versa.

Segundo, usaremos a regra de inferência conhecida como *Modus Ponens*:

b) De “A” e $A \supset B$, pode-se inferir “B”.

Agora definiremos um teorema de P como qualquer fórmula derivável de axiomas de P por meio das aplicações finitas dessas duas regras de inferência, (a) e (b). Mais exatamente um teorema de P é qualquer fórmula A de P a qual é a última fórmula em

alguma seqüência finita de fórmulas de P, onde cada fórmula nesta seqüência está um axioma de P, ou obtido de fórmulas anteriores por aplicação da regra (a) ou (b), tal seqüência será chamada de uma prova de "A".

Um exemplo de uma prova de um teorema de P, tipo $(p \supset p)$.

- 1) $(p \supset (p \supset p))$ axioma (a)
 - 2) $(p \supset ((p \supset p) \supset p))$ axioma (a)
 - 3) $((p \supset ((p \supset p) \supset p)) \supset ((p \supset (p \supset p)) \supset (p \supset p)))$ Axioma (b)
- | | |
|------------|------------|
| (A) | (B) |
|------------|------------|
- 4) $((p \supset (p \supset p)) \supset (p \supset p))$ 2, 3 regra (b)
 - 5) $(p \supset p)$ (teorema) 1, 4 regra (b)

Cada uma destas fórmulas, nessa seqüência de cinco fórmulas, é claramente uma prova da última fórmula na seqüência: $(p \supset p)$.

Uma regra perfeita de inferência é definida como qualquer regra que quando aplicada a fórmulas exatas, nos permite inferir apenas fórmulas exatas. Pela consulta de tabelas-verdade para os conectivos sentenciais o leitor verá que (a) e (b) são regras perfeita de inferência.

Há certamente, um grande número de regras perfeitas de inferência estritamente falando, um número infinito.

Certamente dessas regras de inferência dependem da sua perfeição isoladamente sobre as propriedades lógicas dos conectivos funcionais exatos. Considere, por exemplo, o esquema tautológico:

$(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$. Contraposição (nega ambos).

Correspondente a este esquema, há um regra perfeita de inferência: de $A \supset B$, então de $\sim B$ pode-se inferir $\sim A$.

As boas condições desta regra de inferência consistem no fato de que para qualquer das duas fórmulas A e B, sempre que $A \supset B$ e $\sim B$ são *verdadeiros*, então $\sim A$ é *verdadeiro* também. E este fato em si depende unicamente das propriedades lógicas de conectivos sentenciais envolvidos " \sim " e " \supset ". Similarmente, para cada esquema tautológico de forma condicional há correspondentes de uma regra de inferência. Ainda que haja um grande número de regras de inferência, usaremos dentro do nosso sistema P apenas as regras de *intercâmbio definicional* e *Modus Ponens*. Na derivação de teoremas de axiomas podemos dispensar regra primitiva de inferência.

Na prática, entretanto, é muito conveniente ser capaz de esboçar regras perfeitas adicionais de inferência, tais como a regra que nos permite inferir $\sim A$ de $A \supset B$ e $\sim B$. Esta

regra pode ser resultado de uma prova efetiva, pois podemos mostrar efetivamente como colocar qualquer inferência dentro de P, na qual é usado por uma inferência onde apenas as regras primitivas de inferência de P são usadas. Considere uma inferência na qual esta regra é usada:

- 1) $A \supset B$;
- 2) $\sim B$, e
- 3) $\sim A$.

Esta inferência de $\sim A$ de $A \supset B$ e $\sim B$ pode ser recolocada por uma inferência na qual apenas regras primitivas são usadas. Para qualquer fórmula de A e B, a fórmula $(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$ será derivada dos axiomas de P. Além disso, em nossa inferência, primeiramente derivamos a fórmula $(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$. Então, adicionamos o passo $A \supset B$, e pelo *Modus Ponens* concluímos $\sim B \supset \sim A$. Finalmente, adicionamos o passo $\sim B$ e concluímos $\sim A$ pelo *Modus Ponens*.

Qualquer regra de inferência descrita acima pode ser usada como uma regra derivada de inferência de P. As regras derivadas de inferência servem como *atalhos*. Permitem derivar fórmulas de outras fórmulas por passos menores do que seriam necessários se utilizássemos apenas regras primitivas. Para todo o esquema tautológico de forma condicional há correspondentes de uma regra exata de inferência. Além disso, é sabido que há um procedimento efetivo para se derivar qualquer tautologia de P de axiomas de P. Para todo o esquema tautológico de forma condicional há correspondentes a uma regra de inferência.

1.2 Propriedades matemáticas de P.

Os lógicos têm estudado a lógica sentencial muito extensivamente. Não estamos aqui primeiramente interessados na lógica sentencial na sua própria consideração, mas como um passo para uma lógica mais compreensível; a lógica predicada de 1ª ordem por esta razão, iremos considerar a lógica sentencial a uma aproximação pela introdução de três conceitos sintáticos, os quais servem para desenhar algumas características básicas do sistema de P. Permitem que Γ seja qualquer conjunto (não nulo) de fórmulas de P então:

- 1) Γ é *consistente* se e apenas se não houver A de P, tal que ambos A e $\sim A$ são derivados de Γ .
- 2) Γ é *completo* se e apenas se toda a tautologia de P é derivada de Γ .

3) Γ é um *conjunto decidível* de fórmulas se e apenas se houver um procedimento efetivo para determinação com ou sem qualquer fórmula A de P que está em Γ .

É muito fácil de mostrar que o conjunto de axiomas para P , o qual se apresentou acima é *consistente*. *Primeiro*, cada um destes axiomas é uma tautologia, como pode ser comprovado através de tabela-verdade dos conectivos sentenciais. *Segundo*, as duas regras primitivas de inferência em P quando aplicadas à tautologia nos permite inferir apenas tautologias.

Além disso, para o *Modus Ponens*, suponha que ambos A e $A \supset B$ são tautologias. Então B deve ser uma tautologia também. Para que não seja uma tautologia, seria necessária alguma indicação de valores verdadeiros às letras sentenciais aparecendo dentro deles, de modo que tornaria B falso. Mas então, desde que A é uma tautologia, na indicação de valores verdadeiros o antecedente de $A \supset B$ seria verdadeiro e seu conseqüente falso. Pela tabela-verdade para o condicional, a fórmula $A \supset B$ seria falsa e, além disso, não seria uma tautologia, contrariamente a nossa suposição.

Por razão similar, pode-se mostrar que a regra de intercâmbio definicional quando aplicada às tautologias, permitem inferir apenas tautologias. Assim podemos concluir que todos os teoremas de P são tautologias. Mas, tautologia pode ser a negação de qualquer outra tautologia, seria falso para cada indicação de valores às suas letras sentenciais e P , tal como A e $\sim A$ são teoremas de P . Além disso o conjunto de P é *consistente*.

Como já temos destacados, nosso conjunto de axiomas é conhecido por ser completo (aqui omitimos a prova disso). Junto com o fato de que todos os teoremas de P são tautologias, segue-se que a classe de fórmulas, as quais são teoremas de P são tautologias de P e a partir disso os teoremas de P são *decidíveis*; isto é, que há um procedimento mecânico para determinar se uma fórmula arbitrária de P é um teorema de P . Tudo que precisamos fazer para determinar se qualquer fórmula dada de P é um teorema de P , é construir a tabela-verdade para essa fórmula. Se esta fórmula mostrar que é uma tautologia então, ela é um teorema de P ;

Se, em qualquer parte do mundo, recolocarmos a palavra "Tautologia" pela frase "Teorema de P ", os resultados serão todos tópicos verdadeiros. Em particular, temos o resultado que se Γ é uma classe de teoremas de P e A é uma conseqüência tautológica de Γ , então A é um teorema de P .